MECÁNICA CUÁNTICA 2008
POSTGRADO – PARTÍCULAS IDÉNTICAS-DIFUSIÓN

39
a. En el modelo de Thomas Fermi, verfique que $144/x^3$ es solución exacta. ¿Qué representa?

b. Desarrolle la solución en potencias $a+bx^{1/2}+cx+dx^{3/2}+ex^2+\ldots$ y halle los coeficientes que sea posible hasta x^3.

c. Muestre que el modelo de Thomas-Fermi es válido para átomos ionizados y encuentre en ese caso las condiciones de contorno. ¿Es finito el radio del ión?

d. Para átomos neutros estime - la distancia media entre el electrón y el núcleo y - el valor medio de la interacción de Coulomb entre dos electrones.

40.
a. Demuestre el teorema de Koopmans en la aproximación de Hartree Fock: la energía de ionización de un átomo ($-e_i$), al que se le arranca el electrón i-ésimo, es $E_{ion} – E$.

b. Considere dos partículas de espín ½ que interactúan con un potencial central independiente del espín (átomo de Helio). Escriba Hartree-Fock para el estado base

c. Repita para el primer estado excitado para (S=0) y ortho (S=1). ¿Cómo quedan las ecuaciones para la aproximación de Hartree?

41.
Muestre que los estados de N partículas, escritos en segunda cuantificación, son totalmente simétricos/asimétricos según sean bosones o fermiones.

42.
Considere dos osciladores armónicos de la misma frecuencia natural en interacción. Si la interacción es proporcional al producto de las posiciones de los dos osciladores, estudie este sistema en el formalismo de segunda cuantificación:

a. Escriba el hamiltonano en coordenadas adimensionales.

b. Defina las coordenadas normales que diagonalizan el hamiltoniano y escriba este en función de los operadores de creación y aniquilación para estos operadores; escriba los estados $|N_1N_2\rangle$ y sus energías.

43.
En un modelo para ^{4}He superfluido $|0\rangle$ es el estado base (todos los átomos en el estado de momento cero) y los operadores $\mathbf{a_k}$ y $\mathbf{a_k}^\dagger$ crean y aniquilan átomos individuales en estados de momento dado. Estos operadores tienen las relaciones

usuales de conmutación del oscilador y los operadores $\mathbf{a_k}$ aniquilan el estado base. Un modelo para el hamiltoniano del sistema es:

$$H = A + \sum_{k\neq 0}(E_k + W_k)a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} W_k(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k})$$

donde $E_k = h^2k^2/2m$ es la energía cinética usual y el término con W_k representa la interacción de átomos excitados con el condensado de átomos en el estado $|0\rangle$. Los subíndices de momento están elegidos de forma que en la interacción se conserve el momento.

a. Muestre que por medio de una transformación de Bogoliubov

$$a_k = b_k \cosh\phi_k + b_{-k}^\dagger \mathrm{sih}\phi_k$$

el hamiltoniano se puede escribir como una suma de osciladores

$$H = B + \sum_{k\neq 0}\varepsilon_k b_k^\dagger b_k \qquad \text{(asuma que } W_k=W_{-k})$$

b. Muestre que los operadores de Bogoliubov tienen relaciones de conmutación de oscilador armónico. Encuentre las funciones ϕ_k que diagonalizan el problema y calcule los autovalores de energía ϵ_k. Muestre que a bajas energías las excitaciones son fonones (relación de dispersión lineal).

44.
a. Considere el potencial de Yukawa $V(r) = V_0\ e^{-a r} / r$. Calcule la sección eficaz diferencial en la aproximación de Born. Calcule la sección eficaz total.

b. En el límite $a \to 0$ obtenga el resultado para el potencial Coulombiano (fórmula de Rutherford).

c. Calcule también en la aproximación de Born para un potencial Gaussiano y para un caja esférica de paredes no rígidas ($V = - V_0$ si $r < r_0$ y cero en otro caso). Verifique que en todos los casos la sección eficaz es isótropa a bajas energías.

d. ¿Se cumple el Teorema Óptico del ej. 46?

45.
La aproximación de Born es válida para potenciales muy débiles o para altas energías.

a. Obtenga una expresión cuantitativa de esta afirmación a partir de la siguiente consideración: en la expresión $\psi_k = e^{i\,\mathbf{k\cdot r}} + \psi_d$ la aproximación de Born se obtiene de aproximar esta última función por la onda plana; esta aproximación es válida si $|e^{i\,\mathbf{k\cdot r}}| >> |\psi_d|$ en la región en que el potencial es no nulo ($r < r_0$). Escriba esta desigualdad para el "peor" punto, $r = 0$, y obtenga una condición para la validez de la aproximación. Escriba esta última condición para un potencial central.

b. Considere el límite de bajas energías para un potencial de rango r_0 y valor efectivo V_0 muestre que la condición es equivalente a que el potencial no tenga estados ligados.

c. Escriba la condición para muy altas energías, $k\, r_0 >> 1$. Muestre que si la condición de bajas energías es satisfecha entonces esta última se cumple.

46.
Considere la difusión de partículas de energía E en un potencial central de rango finito.

a. Muestre que las autofunciones del hamiltoniano $v_k^d(\mathbf{r})$ dependen únicamente de r, un ángulo y la energía. El ángulo puede elegirse como $\cos^{-1}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$.¿Cuáles son las variables de las que depende la amplitud de difusión?

b. Calcule la corriente de densidad de probabilidad correspondiente a $v_k^d(\mathbf{r})$ en la región asintótica y muestre que se puede escribir como $\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d + \Delta\mathbf{J}$, donde el primer término corresponde a las partículas incidentes y el segundo a las partículas difundidas. ¿Cuál es el origen del tercer término? Muestre que

$$\oint_{S_\infty} d\vec{S}\cdot\vec{J}_d = -\oint_{S_\infty} d\vec{S}\cdot\Delta\vec{J}$$

donde S_∞ es una superficie esférica de radio infinito con origen en el centro del potencial,

c. Use el resultado anterior para probar, en el caso de potenciales centrales, el TEOREMA ÓPTICO

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\left[f_k(0)\right]$$

Notas: - el teorema óptico es válido para cualquier potencial.
- es útil demostrar la relación

$$\int d\cos\theta\, F(\theta) e^{-ikr\cos\theta} = \frac{i}{kr}\left[F(0)e^{-ikr} - F(\pi)e^{ikr}\right] + O\left(1/r^2\right)$$

d. Usando el resultado anterior demuestre que

$$\sigma \le \frac{4\pi}{k}\sqrt{\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}}$$

47.
Considere la difusión de partículas por una distribución de blancos. Cada difusor está localizado en $\mathbf{r_i}$ y el potencial de interacción es $V_o(\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{r_i}\,|\,)$. Escriba la amplitud de difusión en la aproximación de Born.

a. Considere el caso de un cubo de lado a con los difusores en los 8 vértices.

b. Repita para una red cúbica de espaciamiento a.