MECÁNICA CUÁNTICA 2008
POSTGRADO – GRUPOS Y SIMETRÍAS

30.
Sea T la representación del grupo simétrico S_3 en C^3 definida de forma que a

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

le corresponda T(s) tal que $T(s)\, e_1 = e_i$, $T(s)\, e_2 = e_j$, $T(s)\, e_3 = e_k$ siendo e_1, e_2, e_3 una base de C^3 .
a. Halle un vector no nulo invariante por T.
b. Halle un subespacio de dimensión 2, también invariante por T y que no contiene al vector anterior, obteniendo así una reducción $T = T_1 \oplus T_2$ con T_1 representación trivial de dimensión 1 y T_2 de dimensión 2.

31.
La representación regular T en el espacio C^n para un grupo $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ se define $T(g_i)\, e_j = e_k$ si $g_i \cdot g_j = g_k$ siendo $\{ e_i \}$ base de C^n.
a. Muestre que es una representación y que en cada fila o columna hay un único 1 y todos los demás elementos son 0.
b. Esta representación contiene todas las representaciones irreducibles de G, cada una un número de veces igual a su dimensión.
c. Demuestre que para un grupo G, de elementos R e identidad E, de orden h y una representación j de dimensión d_j :

$$\sum_j d_j \chi^{(j)}(R) = h\, \delta_{R,E}$$

32.
a. Pruebe que para toda representación irreducible distinta de la trivial

$$\sum_{s \in G} \chi(s) = 0$$

b. Para cada representación M(g) de un grupo G considere la representación conjugada $M^*(g)=(M(g))^*$. Demuestre que
- $M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow M_1^* \sim M_2^*$
- $M \sim M^* \Rightarrow M^*$ tiene carácter real
- M es irreducible $\Leftrightarrow$ M* es irreducible

33.
Demuestre que $SU(2)/Z_2$ es isomorfo a SO(3).

34.
Use el teorema de Unhsold para demostrar que capas cerradas en un átomo son invariantes por rotaciones (su distribución de probabilidad es esférica).

35.
El producto directo de dos grupos G_1 y G_2 se define como el grupo $G_{12} = G_1 \times G_2$ de elementos $g_{1i}\, g_{2k}$ donde los elementos de G_1 conmutan con los de G_2: $g_{1i}\, g_{2k} = g_{2k}\, g_{1i}$.
a. Demuestre que si A y B son representaciones de G_1 y G_2 el producto directo de las matrices AxB es una representación, donde $(A\times B)_{ik,jl} = A_{ij} B_{kl}$.

b. Use el lema de Schur para demostrar que dos representaciones irreducibles de G_1 y G_2 definen una representación irreducible del grupo producto.
c. Demuestre que de esta forma de construyen todas las representaciones del grupo producto.
d. Muestre que el carácter se obtiene como el producto de los caracteres.
e. Considere el producto directo del grupo de rotaciones del triángulo equilátero (D_3) con el grupo S = {I, σ_h}, siendo esta última la reflexión en el plano del triángulo; este grupo de llama $D_{3h} = D_3 \times S$. Construya la tabla de caracteres y discuta las posibles degeneraciones.

36.
Considere los símbolos 3j definidos de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2+m} \left\langle j_1\, j_2; m_1\, m_2 \mid j_1\, j_2; jm \right\rangle$$

Calcule como se transforman ante permutaciones cíclicas de columnas, cambio de las tres proyecciones m y ante el intercambio de dos columnas.

37
Degeneración accidental del átomo de hidrógeno. Considere el vector de Runge – Lenz $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} /m - e^2/r\, \mathbf{r}$.
a. Considere su correspondiente operador cuántico **N** convenientemente simetrizado y verifique que $[\mathbf{N},H] = 0$.
b. Demuestre que es un operador vectorial y considere el operador esférico de rango uno correspondiente. Calcule $[N_q^{(1)} , H]$.
c. ¿Qué energía tienen los estados $N_1^1 \mid n, l, l \rangle$? Demuestre que este estado es proporcional al estado $\mid n, l+1 , l+1\rangle$ y que la constante de proporcionalidad se anule si $l \geq l_{max} = n-1$.

38.
Degeneración accidental del oscilador armónico isótropo en 3 dimensiones.
a. Demuestre que los estados que difieren en dos unidades de momento angular l son degenerados.
b. Este sistema tiene la simetría rotacional pero además una simetría que explica la degeneración. Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$ cuyas componentes son los operadores de creación destrucción usuales en las direcciones x, y z. Discuta entonces la simetría del sistema e indique el número de generadores de esta simetría.
c. Indique, en base a las simetrías del problema, igual número de operadores que son conservados, y cuya aplicación a autoestados del sistema producen estados de igual energía. Descomponga estos operadores en operadores esféricos: $T^{(0)}$, $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$. Demuestre que $T^{(0)}$ es proporcional al Hamiltoniano y que los estados $T^1{}_1 \mid n, l, l \rangle = 0$.
d. Calcule la componente $T^{(2)}{}_2$ y muestre que el estado $T^{(2)}{}_2 \mid n, l, l \rangle$ es proporcional al estado $\mid n, l+2 , l+2\rangle$ lo que demuestra la degeneración en l para cada n (si $l \geq l_{max} = n$ la constante de proporcionalidad es cero).