MECÁNICA CUÁNTCA 2008
POSTGRADO – ROTACIONES

13.
Calcule explícitamente, usando rotaciones, la acción de L_z L_x L_y en la representación de posición. Demuestre que $L^2 = r^2\, p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i\, \hbar\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ y calcule entonces el operador energía cinética en función del operador momento angular al cuadrado.

14.
a. Demuestre que L_z es hermítico si actúa sobre funciones de onda periódicas.
b. Calcule el conmutador de L_z y φ.
c. ¿Es válido el principio de incertidumbre en este caso? Encuentre la expresión de la cota inferior del conmutador de estas dos variables.
d. Indique qué condición debe satisfacer la función de onda para que el signo de igual en esta relación de incertidumbre generalizada sea válido.
e. Para funciones de onda proporcionales a $\exp(\lambda\, \varphi^2 / 2\, \pi^2)$ encuentre y grafique el mínimo valor de la relación de incertidumbre.

15.
La función de onda de una partícula sometida a un potencial con simetría esférica $V(r)$ está dada por $\psi(x,y,z) = (x + y + 3z)\, f(r)$.
a. Indique qué valores del momento angular orbital se pueden medir en este estado.
b. Calcule las probabilidades de medir los diferentes proyecciones m_l posibles.
c. Suponga que se sabe además que esta función de onda es autoestado de energía E. Indique cómo entonces puede calcularse $V(r)$.

16.
a. Evalúe

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{(j)}_{mm'}(\beta) \right|^2 m$$

y verifique su respuesta en el caso j=1/2.

b. Demuestre que

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{(j)}_{mm'}(\beta) \right|^2 m^2 = \frac{1}{2} j(j+1)\sin^2\beta + m'^2\, \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$$

17.
Considere el operador de momento angular orbital L_z como una forma cuadrática en los operadores de posición y momento; proceda a diagonalizar esta forma cuadrática en nuevos operadores, calcule las relaciones de conmutación entre

estos y la expresión de L_z en función de estos operadores. Interprete el resultado físicamente. ¿Qué se puede concluir acerca de los autovalores de L_z ?

18.
Exprese el elemento de matriz $\langle \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2 \mid J_3^2 \mid \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \rangle$ en términos de una serie en $D^{(j)}_{mn}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \langle \alpha\ \beta\ \gamma \mid jmn \rangle$.

19.
Considere un tensor esférico de rango 1 (vector)

$$V^{(1)}_{\pm 1} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V^{(1)}_0 = V_z$$

Use la expresión de $d^{(j=1)}$ para calcular

$$\sum_{q'} d^{(1)}_{qq'}(\beta) V^{(1)}_{q'}$$

y muestre que el resultado es el que espera de acuerdo a las propiedades de transformación de V_x , V_y , V_z por rotaciones alrededor del eje y.

20.
Construya un tensor esférico de rango 1 a partir de dos vectores $\mathbf{U}=(U_x,U_y,U_z)$ y $\mathbf{V}=(V_x,V_y,V_z)$. Escriba además $T^{(1)}_{\pm 1,0}$ en función de las componentes de **U** y **V**.

21.
Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo por un potencial central.
a. Relacione, usando únicamente el teorema de Wigner-Eckart, los elementos de matriz

$$\left\langle n',l',m' \middle| \mp 1/\sqrt{2}(x \pm iy) \middle| n,l,m \right\rangle \quad \text{y} \quad \left\langle n',l',m' \middle| z \middle| n,l,m \right\rangle$$

y discuta en qué condiciones los elementos de matriz no son nulos.
b. Repita el cálculo usando funciones de onda $\psi(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

22.
a. Escriba xy, xz, (x^2-y^2) como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.
b. El valor esperado $Q \equiv \langle \alpha, j, m \mid (3z^2-r^2) \mid \alpha, j, m=j \rangle$ se llama momento cuadrupolar. Calcule . e $\langle \alpha, j, m' \mid (x^2-y^2) \mid \alpha, j, m=j \rangle$ donde m' = j, j-1, …. en términos de Q y coeficientes de Clebsch-Gordan.

23.
Demuestre que las definiciones de operador vectorial

$$D^\dagger(R) V_i D(R) = \sum_j R_{ij} V_j \quad \text{y} \quad \left[V_i, J_j\right] = i\varepsilon_{ijk} V_k$$

son equivalentes.