MECÁNICA CUÁNTCA 2008
POSTGRADO – MOMENTO ANGULAR

1.
Demuestre la relación de Heisenberg generalizada para operadores autoadjuntos:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \tfrac{1}{2} \left| \langle [A,B] \rangle + \langle \{A,B\} \rangle \right|$$

2.
Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ de los cuales se conocen las coordenadas en una base $\{ |a\rangle \}$.
a. Escriba la matriz del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.
b. Considere ahora un sistema de espín ½ donde los dos ket son $|s_z=\hbar/2\rangle$ y $|s_x=\hbar/2\rangle$. Escriba la matriz en este caso.

3.
Construya directamente el estado $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle$ tal que $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\ |\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle = \hbar/2\ |\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle$ donde el versor **n** tiene ángulos polares β (con el eje z) y α (con el eje x). Repita el cálculo rotando el estado de espín $\hbar/2$ en la dirección z.

4.
El Hamiltoniano de un sistema de dos niveles es $H = a\ (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$, dónde el número a tiene dimensiones de energía. Encuentre las energías y autoestados del sistema.

5.
El operador traslación para un desplazamiento finito **l** se definió como: $T(\mathbf{l}) = \exp(-i\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{l}/\hbar)$ dónde **p** es el operador momento.
a.Calcule $[\, r_i, T(\mathbf{l})]$.
b. Demuestre cómo cambia por traslaciones el valor medio $\langle \mathbf{r} \rangle$.

6.
Sean $|a\rangle$ y $|b\rangle$ autoestados de un operador hermítico A con autovalores a y b respectivamente ($a \neq b$). El operador Hamiltoniano esta dado por $H = |a\rangle\, \Delta\, \langle b| + |b\rangle\, \Delta\, \langle a|$ siendo Δ un número real.
a. Escriba los autoestados y energías del sistema.
b. Suponga que el sistema está en el estado $|a\rangle$ en $t = 0$; escriba el vector de estado para $t > 0$.
c. Calcule, en este caso, la probabilidad de encontrar al sistema en $|b\rangle$ para $t > 0$.
d. Suponga que los dos estados anteriores se refieren a estados de una partícula en una caja con una membrana que separa la caja en mitades; en estos estados se sabe con certeza que la partícula está en la mitad izquierda ($|L\rangle$) o en la mitad derecha ($|R\rangle$). La partícula puede pasar a través de la membrana y su hamiltoniano está dado al principio del problema. Repita las partes anteriores en este caso.

7.
Calcule la función de correlación C(t)= ⟨ x(t) x(0) ⟩, siendo x(t) el operador posición en la representación de Heisenberg, para un oscilador armónico en el estado base.

8.
Considere la matriz 2x2 definida por a_0 real y el vector **a** real:

$$U = \frac{a_0 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}}{a_0 - i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}}$$

Demuestre que esta matriz pertenece a SU(2) y encuentre el eje y ángulo de rotación que representa.

9.
Considere una partícula de espín 1; escriba la matriz que representa al operador $S_z\,(S_z+\hbar)\,(S_z-\hbar)$. Idem para $S_x\,(S_x+\hbar)\,(S_x-\hbar)$.

10.
Sea $U = \exp(i\,G_3\,\alpha)\,\exp(i\,G_2\,\beta)\,\exp(i\,G_3\,\gamma)$ donde (α,β,γ) son los ángulos de Euler.
a. Si U representa una rotación (α,β,γ) encuentre las relaciones de conmutación que satisfacen los G_k y relacione **G** a los operadores de momento angular.
b. Considere una secuencia de rotaciones de Euler representadas por la matriz

$$D^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp\left(-\frac{i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_3\gamma}{2}\right)$$

Encuentre el ángulo de rotación que representa esta matriz.

11.
Considere un autoestado de momento angular orbital |l=2,m=0⟩; suponga que este estado se rota un ángulo β alrededor del eje y. Encuentre las probabilidades de medir m = 0, ±1, ±2.

12.
Considere un sistema con j =1.
a. Escriba la matriz 3x3 $\langle j=1,m' \,|\, J_y \,|\, j=1,m \rangle$.
b. Muestre que, solamente para j =1, se cumple $\exp(-i J_y \beta/\hbar) = 1 - i (J_y/\hbar) \sin\beta - (J_y/\hbar)^2 (1-\cos\beta)$.
c. Calcule $d^{(j=1)}(\beta)$.